MAT 454 ÖKLİDYEN OLMAYAN GEOMETRİLER DERSİ DÖNEM SONU SINAVI CEVAP ANAHTARI

1)ℓ, P noktasından geçen ve doğrultmanı N olan bir doğru olsun.X noktasının ℓ doğrusuna uzaklığına eşit ve ℓ doğrusunun diğer tarafındaki noktaya, X noktasının ℓ doğrusuna göre **simetriği** denir.

2)Düzlemde uzaklık koruyan dönüşümlere **izometri** denir.

3) ℓve m, P noktasından geçen iki doğru olsun.Ω_ℓ ve Ω_m, sırası ileℓve $m$doğrularına göre birer yansıma olmak üzere, $\Omega_\ell\,\Omega_m$ dönüşümüne bir**dönme** denir.

4) A, B ve Ckürenin aynı büyük çemberi üzerinde olmayan üç nokta olsun. AB, BC ve CA büyük çember yayları ile oluşan üçgene **küresel üçgen**, denir ve bir küresel üçgende iç açılar toplamı **180^0den büyüktür**.

5) α ve β, l doğrusuna dik doğrular olsun. Bu durumda $T = \Omega_\alpha \Omega_\beta$ dönüşümüne $l$doğrusu boyunca.**bir öteleme**.denir.

6)Spacelike, Timelike ve Null vektörler, sırası ile, $\mathbb{R}^3{}_1$Lorentz uzayında bir ışık konisinin .**dışında, içerisinde**ve **üzerinde**bulunurlar.

7) $\ell \ldots 2x - y + 1 = 0$ doğrusu veriliyor. $A = (-2,1)$ noktasının , ekseni ℓ olan ötelemeli yansıma dönüşümü altındaki değerini bulunuz.

8)Düzlemde$A = (2,1), B = (3,4)$noktaları veriliyor.$\alpha = 30$ açılık dönme dönüşümü altında A ve B noktalarından geçen doğrunun görüntüsünü bulunuz.

9) $M = \{P = (x, y, z) \in E^3 : x^2 - y^2 - z^2 = 1\}$iki kanatlı hiperboloid yüzeyi veriliyor. Stereografik izdüşüm yöntemini kullanarak M yüzeyi üzerinde Poincare disk modelini açıklayınız.

10) Düzlemde öteleme dönüşümünü tanımlayınız ve ötelemelerin bir izometri olup, olmadığını araştırınız.

CEVAPLAR

7)$\ell = P + [v]$ ve $N = \frac{1}{\|v^\perp\|} v^\perp$ birim vektör olmak üzere ötelemeli yansıma denklemi için

$$T_v \Omega_\ell(X) = X - 2\langle X - P, N\rangle N + v$$

yazılır. O halde

$$\ell \ldots 2x - y + 1 = 0$$

doğrusu için

$$P = (0,1), v = (2,-1) \text{ve } N = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)$$

olduğundan

$$T_v\Omega_\ell(A) = A - 2\langle A-P, N\rangle N + v$$

$$= (-2,1) - 2\left\langle(-2,1)-(0,1), \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)\right\rangle \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2) + (2,-1)$$

$$= (-2,1) - \frac{2}{5}\langle(-2,0),(1,2)\rangle(1,2) + (2,-1)$$

$$= \left(\frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right)$$

elde edilir.

8) $$\begin{array}{llcl} rot: & E^2 & \to & E^2 \\ & (x,y) & \to & rot(x,y) = (x', y') \end{array}$$

dönüşümünün denklemi

$$\begin{cases} x' = x\cos 30 - y\sin 30 = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y \\ y' = x\sin 30 + y\cos 30 = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y \end{cases}$$

veyamatrisel formda

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

biçiminde verilebilir.

1.YOL:

$A = (2,1)$ ve $B = (3,4)$ noktalarından geçen doğrunun denklemi

$$L \ldots \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{3}$$

veya

$$L \ldots 3x - y - 5 = 0$$

olarak yazılabilir. O halde$A = (2,1)$ ve $B = (3,4)$ noktalarının görüntüleri

$A' = rot(A) = \left(\frac{2\sqrt{3}-1}{2}, \frac{2+\sqrt{3}}{2}\right)$ ve $B' = rot(B) = \left(\frac{3\sqrt{3}-4}{2}, \frac{3+4\sqrt{3}}{2}\right)$ olmak üzere

$$L' \ldots \frac{x' - \frac{2\sqrt{3}-1}{2}}{\frac{3\sqrt{3}-4}{2} - \frac{2\sqrt{3}-1}{2}} = \frac{Y' - \frac{2+\sqrt{3}}{2}}{\frac{3+4\sqrt{3}}{2} - \frac{2+\sqrt{3}}{2}} \Longrightarrow L' \ldots \frac{x' - \frac{2\sqrt{3}-1}{2}}{\frac{\sqrt{3}-3}{2}} = \frac{y' - \frac{2+\sqrt{3}}{2}}{\frac{1+3\sqrt{3}}{2}} \text{veya}$$

$$L' \ldots \frac{1+3\sqrt{3}}{2}x' - \frac{\sqrt{3}-3}{2}y' - \frac{2\sqrt{3}-1}{2}\frac{1+3\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}-3}{2}\frac{2+\sqrt{3}}{2} = 0$$

$$L' \ldots 2\left(1+3\sqrt{3}\right)x' - 2\left(\sqrt{3}-3\right)y' - 20 = 0$$

$$L' \ldots \left(1+3\sqrt{3}\right)x' + \left(3-\sqrt{3}\right)y' - 10 = 0$$

olarak bulunur.

2.YOL:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

eşitlliğinden

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

elde edilir. $A = (2,1)$ ve $B = (3,4)$ noktalarından geçen doğrunun denklemi

$$L \ldots 3x - y - 5 = 0$$

olmak üzere

$$L \ldots 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y'\right) - \left(-\frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y'\right) - 5 = 0$$

$$\frac{3\sqrt{3}+1}{2}x' + \frac{3-\sqrt{3}}{2}y' - 5 = 0$$

$$\left(1 + 3\sqrt{3}\right)x' + \left(3 - \sqrt{3}\right)y' - 10 = 0$$

9) $Q = (x, y, z)$ ve $S = (-1,0,0)$ noktalarından geçen doğru $\boldsymbol{\ell}$ ile gösterilirse, $T = (X, Y, Z)$ olmak üzere $\boldsymbol{\ell}$ doğrusunun denklemi

$$\boldsymbol{\ell} \ldots \frac{X+1}{x+1} = \frac{Y}{y} = \frac{Z}{z} = \lambda$$

veya

$$\boldsymbol{\ell} \ldots \begin{cases} X = \lambda x + \lambda - 1 \\ Y = \lambda y \\ Z = \lambda z \end{cases}$$

olarak bulunur. Diğer taraftan $P = \left(0, y_Q, z_Q\right) \in \boldsymbol{\ell}$ olduğundan

$$\begin{cases} 0 = \lambda x + \lambda - 1 \\ y_Q = \lambda y \\ z_Q = \lambda z \end{cases}$$

denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemi çözülürse

$$\lambda = \frac{1}{1+x}$$

olmak üzere

$$\begin{cases} y_Q = \frac{y}{1+x} \\ z_Q = \frac{z}{1+x} \end{cases}$$

elde edilir. O halde

$$P = \left(0, \frac{y}{1+x}, \frac{z}{1+x}\right).$$

Ayrıca

$$y_Q{}^2 + z_Q{}^2 = \frac{y^2+z^2}{(1+x)^2}$$

ve

$$y^2+z^2 = x^2 - 1$$

olduğundan

$$y_Q{}^2 + z_Q{}^2 = \frac{x^2-1}{(1+x)^2} = \frac{(x-1)(x+1)}{(1+x)^2} = \frac{x-1}{x+1}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$x^2 - 1 = \overbrace{y^2+z^2}^{\geq 0}$$

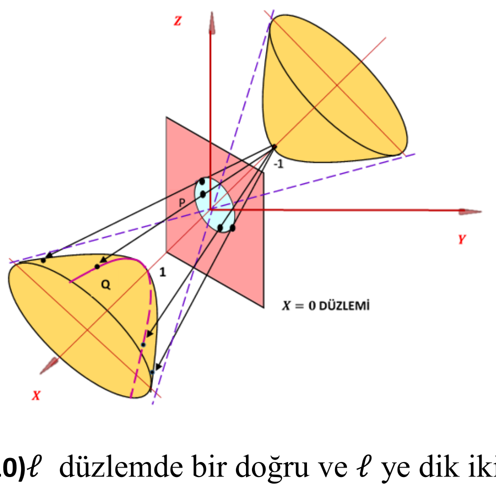
olduğundan

$$x^2 - 1 \geq 0 \Longrightarrow \lceil x \rceil \geq 1 \Longrightarrow x \geq 1 \text{ ve } x \leq -1$$

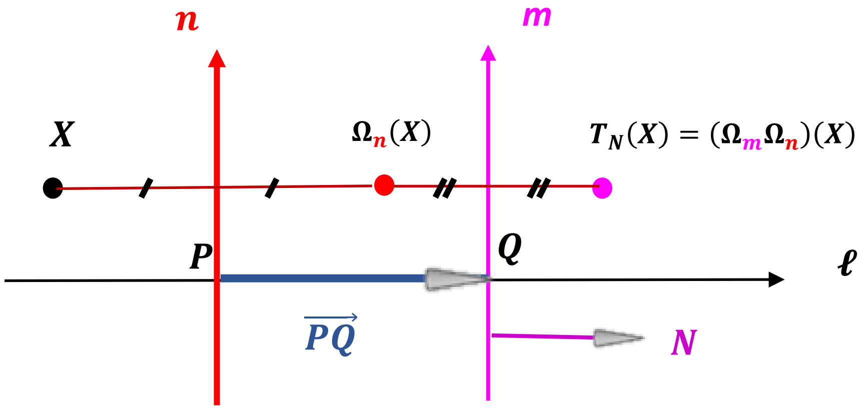
bulunur. O halde

$$x \geq 1 \Longrightarrow 0 \leq \frac{x-1}{x+1} \leq 1$$

yazılabilir. Aşağıdaki şekilden de anlaşılacağı üzere izdüşürülen noktaların geometrik yeri bir disktir ve bu hiperbolik modele **Poincare disk modeli** denir.



10)ℓ düzlemde bir doğru ve ℓ ye dik iki doğru m ve n olsun. Ω_m ve Ω_n , m ve n doğrularına göre yansıma dönüşümleri olmak üzere, $\Omega_m \Omega_n$ dönüşümüne ℓ boyunca bir **öteleme** denir.



N, m doğrusunun birim normali olmak üzere

$$T_N(X) = (\Omega_m\Omega_n)(X) = \Omega_n(X) - 2\langle \Omega_n(X) - Q, N\rangle N$$
$$= X + 2\langle Q - P, N\rangle N$$

veya

$$\overrightarrow{PQ} = \|\overrightarrow{PQ}\| N$$

denilirse,

$$T_N(X) = \Omega_\ell(\Omega_m(X)) = X + 2\|\overrightarrow{PQ}\| N$$

olduğunu biliyoruz. O halde $A, B \in E^2$ olmak üzere

$$d(T_N(A), T_N(B)) = \|T_N(B) - T_N(A)\|$$
$$= \|B + 2\|\overrightarrow{PQ}\|N - A - 2\|\overrightarrow{PQ}\|N\|$$
$$= \|B - A\| = d(A, B)$$

elde edilir. Sonuç olarak öteleme dönüşümü bir izometridir.

Prof. Dr. Ayhan SARIOĞLUGİL